

Cours – Séquence n° 12 – ESPACE (III) : représentations paramétriques, équations cartésiennes

I- REPRÉSENTATIONS PARAMÉTRIQUES D'UNE DROITE

Propriété

L'espace est muni d'un repère $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Soit une droite d passant par un point $A \begin{pmatrix} x_A \\ y_A \\ z_A \end{pmatrix}$ et de vecteur directeur $\vec{u} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$.

On a : $M \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in d \Leftrightarrow$ Il existe un réel t tel que $\begin{cases} x = x_A + ta \\ y = y_A + tb \\ z = z_A + tc \end{cases}$.

Démonstration

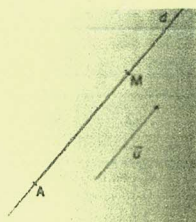
$M \in d \Leftrightarrow \vec{u}$ et $\overrightarrow{AM}$ sont colinéaires

$\Leftrightarrow$ Il existe un réel t tel que $\overrightarrow{AM} = t\vec{u}$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x - x_A \\ y - y_A \\ z - z_A \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - x_A = ta \\ y - y_A = tb \\ z - z_A = tc \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = x_A + ta \\ y = y_A + tb \\ z = z_A + tc \end{cases}$$



Définitions

Sous les conditions de la propriété précédente :

- le système $\begin{cases} x = x_A + ta \\ y = y_A + tb \\ z = z_A + tc \end{cases}, t \in \mathbb{R}$ est une **représentation paramétrique** de la droite d ;
- le réel t est le **paramètre** de cette représentation paramétrique.

Remarque

Une droite admet une infinité de représentations paramétriques.

En effet, on peut choisir un point de d autre que A ou choisir un vecteur non nul colinéaire à $\vec{u}$ et autre que $\vec{u}$.

Exemple 1

Dans un repère orthonormé de l'espace, on donne les points $A(-2; 4; 0)$ et $B(2; -3; 2)$.

1. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (AB).

La droite (AB) passe par le point $A(-2; 4; 0)$ et a pour vecteur directeur $\vec{AB} \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{pmatrix}$ soit $\vec{AB} \begin{pmatrix} 4 \\ -7 \\ 2 \end{pmatrix}$. Donc une représentation paramétrique de la droite (AB) est :
$$\begin{cases} x = -2 + 4t \\ y = 4 - 7t \\ z = 2t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

2. Le point $C(-10; 18; -4)$ appartient-il à la droite (AB) ?

$$C(-10; 18; -4) \in (AB) \Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{R} : \begin{cases} -2 + 4t = -10 \\ 4 - 7t = 18 \\ 2t = -4 \end{cases} : (S)$$

Réolvons (S) dans $\mathbb{R}$:

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} 4t = -8 \\ -7t = 14 \\ t = -2 \end{cases}$$

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} t = -2 \\ t = -2 \\ t = -2 \end{cases}$$

Pour la solution du système (S) est -2 . Donc $C \in (AB)$.

Exemple 2

Dans un repère orthonormé de l'espace, d est la droite de représentation paramétrique
$$\begin{cases} x = 5 - 2t \\ y = -1 + 3t, t \in \mathbb{R} \\ z = 2 \end{cases}$$

Déterminer les coordonnées de deux points de d et les coordonnées de deux vecteurs directeurs de d .

Une représentation paramétrique de d est
$$\begin{cases} x = 5 - 2t \\ y = -1 + 3t \\ z = 2 \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

La droite d passe par le point $A \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et a pour vecteur directeur $\vec{u} \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ et un autre vecteur directeur de d $-3\vec{u} \begin{pmatrix} 6 \\ -9 \\ 0 \end{pmatrix}$

Si $t = 2$, alors $B(3; 2; 2)$ est un autre point de la droite d .

II- ÉQUATIONS CARTÉSIENNES D'UN PLAN

Définition (rappel)

Dire qu'un vecteur non nul $\vec{n}$ est **normal** à un plan P signifie que toute droite de vecteur directeur $\vec{n}$ est orthogonale au plan P.

Propriété (rappel)

Un vecteur non nul $\vec{n}$ est normal à un plan P si, et seulement si, il existe deux vecteurs non colinéaires $\vec{u}$ et $\vec{v}$ du plan P tels que $\vec{u} \cdot \vec{n} = 0$ et $\vec{v} \cdot \vec{n} = 0$.



Propriété

Soient A un point de l'espace et $\vec{n}$ vecteur non nul.

L'ensemble des points M de l'espace tels que $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$ est le plan passant par A et de vecteur normal $\vec{n}$.

Démonstration

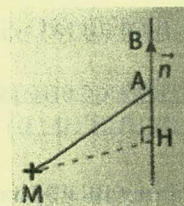
On note B le point distinct de A tel que $\vec{n} = \overrightarrow{AB}$ et H le projeté orthogonal d'un point M sur la droite (AB).

Avec ces notations : $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{AB}$.

Ainsi, $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$, c'est-à-dire $A=H$, car les vecteurs $\overrightarrow{AH}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires.

Autrement dit, $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0 \Leftrightarrow A$ est le projeté orthogonal de M sur la droite (AB).

L'ensemble cherché est donc le plan passant par A et orthogonal à (AB).



Propriété

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

1. Un plan P de vecteur normal $\vec{n} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ admet une équation de la forme $ax + by + cz + d = 0$, où $d \in \mathbb{R}$.

2. Réciproquement, si a, b et c sont non tous nuls, alors l'ensemble des points $M \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ tels que

$ax + by + cz + d = 0$, avec $d \in \mathbb{R}$, est un plan de vecteur normal $\vec{n} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$.

Démonstration*

1. Soit un point $A \begin{pmatrix} x_A \\ y_A \\ z_A \end{pmatrix}$ de P.

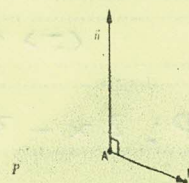
$M \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in P \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}$ et $\vec{n}$ sont orthogonaux

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$$

$$\Leftrightarrow a(x - x_A) + b(y - y_A) + c(z - z_A) = 0$$

$$\Leftrightarrow ax + by + cz - ax_A - by_A - cz_A = 0$$

$$\Leftrightarrow ax + by + cz + d = 0 \text{ avec } d = -ax_A - by_A - cz_A$$



2. Réciproquement, supposons par exemple que $a \neq 0$ (a, b et c sont non tous nuls).

On note E l'ensemble des points $M \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ vérifiant l'équation $ax + by + cz + d = 0$

Alors le point $A \left(-\frac{d}{a} ; 0 ; 0 \right)$ vérifie l'équation $ax + by + cz + d = 0$. Et donc $A \in E$.

Soit un vecteur $\vec{n} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$. Pour tout point $M \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, on a :

$$\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = a \left(x + \frac{d}{a} \right) + b(y - 0) + c(z - 0) = ax + by + cz + d = 0.$$

E est donc l'ensemble des points $M \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ tels que $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$.

Donc l'ensemble E est le plan passant par A et de vecteur normal $\vec{n}$.

Définition

Sous les conditions de la propriété précédente, l'équation $ax + by + cz + d = 0$ est appelée une **équation**

cartésienne du plan de vecteur normal $\vec{n} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$.

Remarque

- Le plan (xOy) passe par l'origine du repère et le vecteur $\vec{k} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal à ce plan.

Donc une équation cartésienne du plan (xOy) est $0x + 0y + 1z + d = 0$, avec $d \in \mathbb{R}$.

Or, $O(0 ; 0 ; 0) \in (xOy) \Leftrightarrow 1 \times 0 + d = 0$

$$\Leftrightarrow d = 0$$

Donc une équation cartésienne de (xOy) est $z = 0$.

- De même, le plan (yOz) a pour équation cartésienne $x = 0$; le plan (xOz) a pour équation cartésienne $y = 0$.

Exemple 1

Dans un repère orthonormé de l'espace, P est le plan passant par le point $E(1 ; 4 ; -2)$ et de vecteur normal $\vec{n} \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer une équation cartésienne de P .

$\vec{n} \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal à P . Soit $P : 2x - 3y - z + d = 0$, avec $d \in \mathbb{R}$

$$\text{Or } E \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} \in P \Rightarrow 2 \times 1 - 3 \times 4 - (-2) + d = 0$$

$$\Leftrightarrow 2 - 12 + 2 + d = 0$$

$$\Leftrightarrow -8 + d = 0$$

$$\Leftrightarrow d = 8$$

$$\text{Soit } P : 2x - 3y - z + 8 = 0$$

2. Le point $F(2; 5; -1)$ appartient-il au plan P ?

$$\begin{aligned} 2x_F - 3y_F - z_F + 8 &= 2 \times 2 - 3 \times 5 - (-1) + 8 \\ &= 4 - 15 + 1 + 8 \\ &= -2 \\ &\neq 0 \end{aligned}$$

Donc $F \notin P$

3. Déterminer les coordonnées d'un point G du plan P .

$$P: 2x - 3y - z + 8 = 0 \quad G(0; 0; 8) \in P$$

$$\begin{aligned} \text{En effet } 2x_G - 3y_G - z_G + 8 &= 2 \times 0 - 3 \times 0 - 8 + 8 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Donc $G \in P$

Exemple 2

Dans un repère orthonormé de l'espace, P est le plan d'équation $-\frac{1}{2}x + y + \frac{3}{2}z = 4$.

Déterminer les coordonnées d'un point de ce plan et les coordonnées d'un vecteur normal à ce plan.

$$P: -\frac{1}{2}x + y + \frac{3}{2}z = 4 \Leftrightarrow P: -\frac{1}{2}x + y + \frac{3}{2}z - 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow P: -x + 2y + 3z - 8 = 0$$

Donc $\vec{n} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal à P

$$\text{Le point } A(0; 4; 0) \in P, \text{ car } -x_A + 2y_A + 3z_A - 8 = 0$$